

Številka prispevka: 36

UJETI KRIVULJO POTI SONCA ČEZ DAN IN JO OPISATI Z MATEMATIČNIM ORODJEM

Boris Kham in Alenka Cvetkovič

astroboris@khamikaze.net

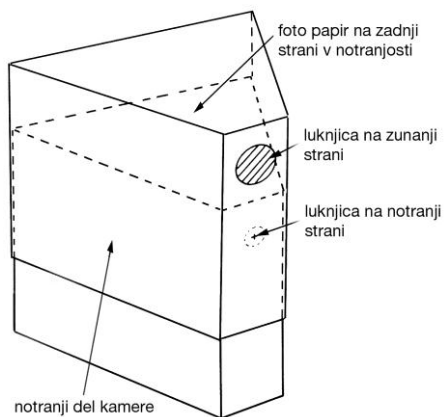
Gimnazija Jožeta Plečnika Ljubljana, Ljubljana

Ključne besede: merjenje višine Sonca, modeliranje s programom GeoGebra

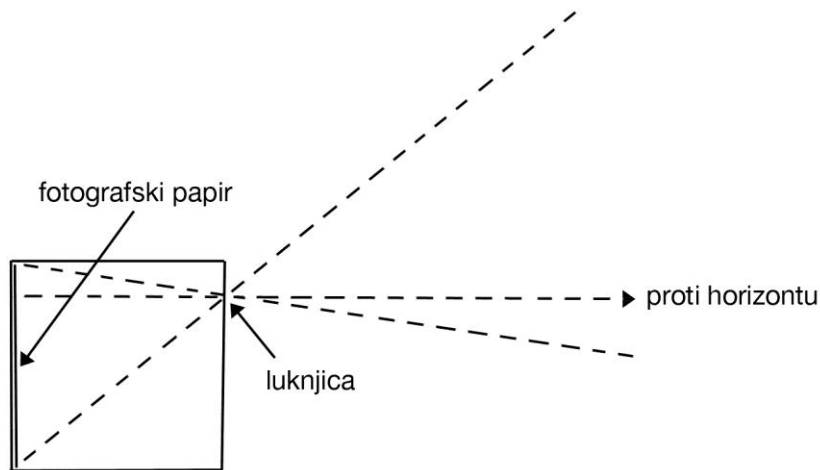
Način predavitve: E-plakat

Uvod

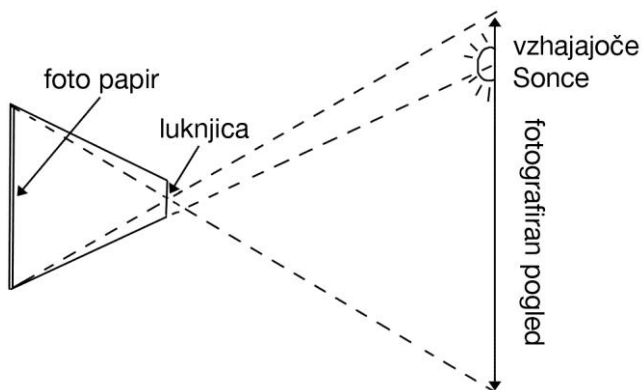
Pomladi 2012 se je naša šola vključila v projekt SUNRISE PROJECT – VERNAL EQUINOX 2012. K temu nas je spodbudil prispevek na Portalu v vesolje (<http://www.eaae-astronomy.org/sunrise-project/documents/SunriseProject.pdf>), kjer je predstavljena osnovna zamisel projekta: izdelati manjšo kamero obskuro (v projektu jo imenujejo PINHOLE camera; gl. sl. 1, 2a in 2b) in z njo posneti vzhod in zahod Sonca ob enakonočju 21. marca 2012.



Slika 1: Načrt kamere



Slika 2a: Princip delovanja kamere in geometrija optičnih žarkov



Slika 2b: Tloris kamere in potek žarkov

Potek dela in sodelovanje dijakov

Iz črne lepenke naredimo kamero obskuro (gl. sl. 1). Paziti moramo, da je luknjica na kameri majhna (naredimo jo npr. s šivanko) in lepo pobrušena. Na zadnjo stran namestimo foto papir (npr. Ilford MGIV, Multigrade IV RC De Luxe). Film vstavimo v kamero pri rdeči svetlobi. Ugotovili smo, da je smiselno izdelati dve kameri: pri drugi namesto foto papirja uporabimo pavš papir in nam služi kot kontrolna kamera. Postavimo ju eno na drugo (glej sl. 3). Po snemanju foto papir skeniramo in obdelamo v Photoshopu.

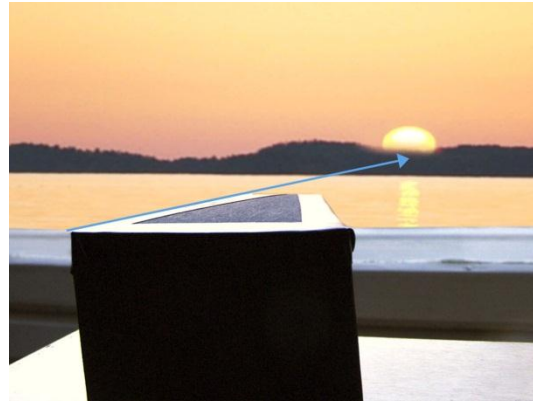


Slika 3: Sistem dveh kamer (s kontrolnima), usmerjen proti zahodu, 27. marca 2012, Barje

Kamero moramo postaviti tako, da je desna stranica usmerjena proti vzhodu. Pri snemanju zahoda pa mora biti leva stranica obrnjena proti vzhodu (gl. sl. 4a in sl. 4b).



Slika 4a: Kamera, usmerjena proti vzhodu



Slika 4b: Kamera, usmerjena proti zahodu

Mi smo tako 27. marca 2012 posneli vzhod in zahod Sonca (glej sl. 5a in 5b)



Slika 5a: Posnetek vzhoda 27. marca 2012, Barje



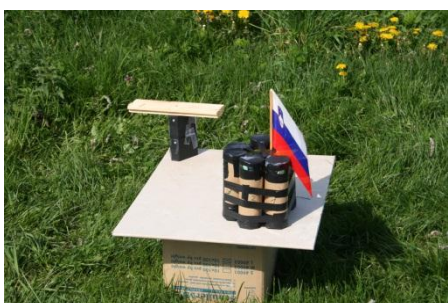
Slika 5b: Posnetek zahoda 27. marca 2012, Barje

Osnovno zamisel projekta smo razširili na iskanje in snemanje celotne poti Sonca čez dan, tako da smo ujeli vzhod, kulminacijo in zahod, in iskanje primerne enačbe posnete krivulje. Tega smo se lotili na dva načina: 27. marca 2012 smo merili kot (α) Sonca nad obzorjem (gl. tabelo 1 in sl. 7) in s sistemom PINHOLE kamer posneli vzhod in zahod Sonca (gl. sl. 5a in 5b). Za merjenje višine Sonca

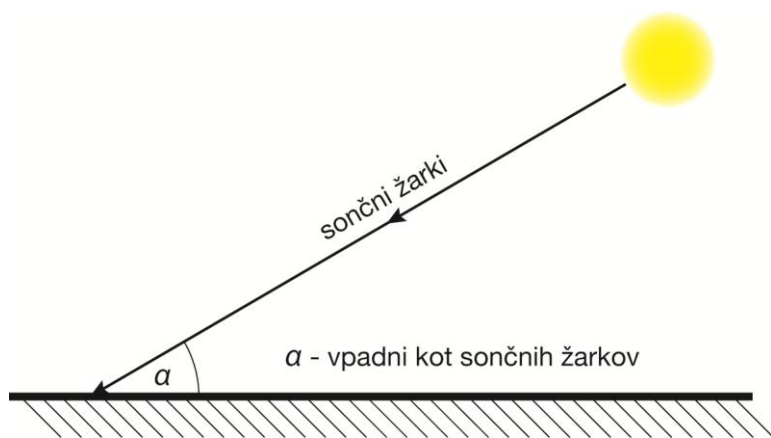
smo uporabili manjši teleskop s filtrom in nanj namestili kotomer (gl. sl. 8). 27. aprila 2012 pa smo PINHOLE kamere zložili v polkrožen sistem (gl. sl. 6) posneli celotno pot Sonca od vzhoda do zahoda, ki oriše krivuljo. Ker je Sonce ob kulminaciji visoko na nebu ($\alpha > 45^\circ$) morajo te kamere biti višje in nekoliko drugačne oblike.

	<i>Srednjeevropski čas</i>	<i>Kot Sonca (α)</i>
1	6 ³⁷	10 ⁰
2	7 ³⁵	20 ⁰
3	8 ³⁵	30 ⁰
4	9 ³⁵	37 ⁰
5	10 ³⁵	45 ⁰
6	11 ³⁵	49 ⁰
7	12 ⁰⁰	50 ⁰
8	12 ³⁵	48 ⁰
9	13 ³⁵	43 ⁰
10	14 ³⁵	39 ⁰
11	15 ³⁵	30 ⁰
12	16 ³⁵	20 ⁰
13	17 ³⁵	10 ⁰
14	18 ¹⁵	0 ⁰

Tabela 1



Slika 6: Okrogle kamere v polkrogu, 27. april 2012, Barje



Slika 7: Vpadni kot sončnih žarkov

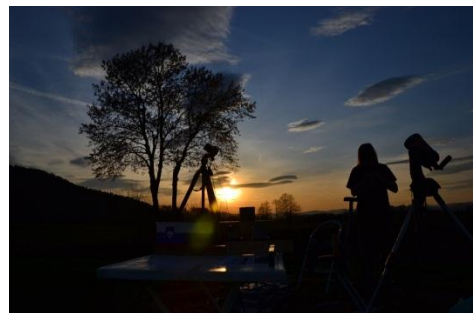


Slika 8: Teleskop s kotomerom

V pomladanskem snemanju in merjenju vzhoda, zahoda in kulminacije so sodelovali štiri dijaki tretjega letnika, ki je naravoslovno usmerjen. To so bili navdušeni dijaki, ki so hodili k astronomskemu krožku. Razložil sem jim projekt in jim dal navodila, da je vsak izdelal po štiri kamere. S temi dijaki smo bili skupaj na terenu ves dan, kjer so merili višino Sonca nad obzorjem (gl. tabelo 1), spremljali kamere, fotografirali dogajanje in s teleskopom opazovali Sonce (gl. sl. 8 in 9).



Slika 9: Priprave na opazovanje Sonca

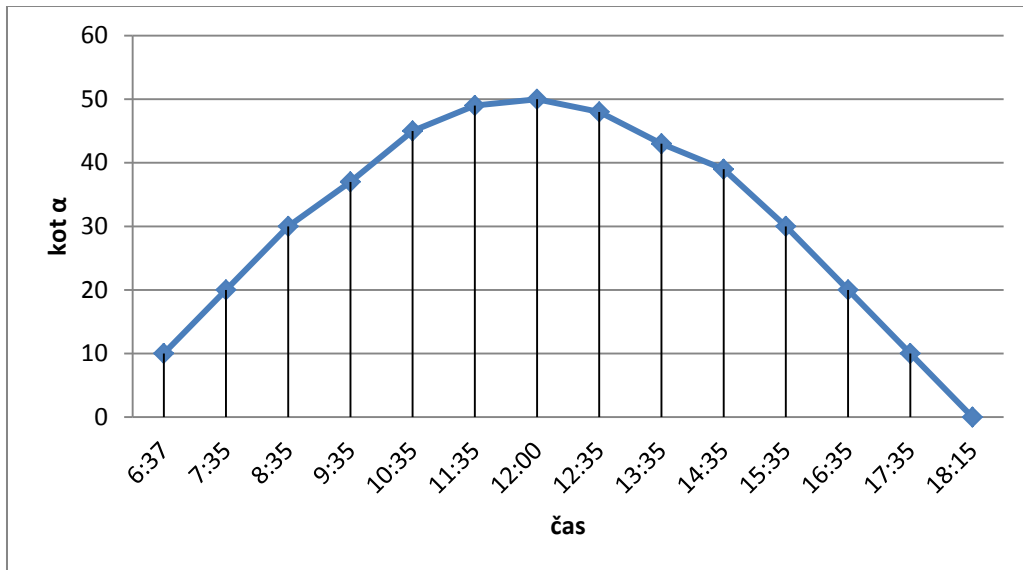


Slika 10: Zahod Sonca na Barju

Na podlagi terenskih meritev so dijaki v programu Excel izdelali graf krivulje α (t) (gl. graf 1), iz katerega so ocenili:

- Sonce čez dan opiše približno parabolo.
- Sonce je najvišje na nebu (njegov maksimum je) pri vrednostih: $t = 12\text{h}10'$; $\alpha = 50^\circ$.
- Sonce je všlo ob $6\text{h}37'$ in zašlo ob $18\text{h}15'$.

Svoje meritve so primerjali s podatki iz literature Efemeride [7] kjer smo za Ljubljano našli podatke: vzhod ob $5\text{h}51'$ in zahod ob $18\text{h}24'$. Iz te primerjave smo zaključili, da je bilo naše opazovanje in merjenje dobro.



Graf 1: Kot (α) Sonca nad obzorjem

Na mednarodnem osmem Plečnikovem taboru (20.–23. junija 2012) smo pri astronomski skupini (17 dijakov od 1. do 3. letnika) izpeljali vaji *Izdelaj PINHOLE kamero in posnemi vzhod in zahod Sonca in Merjenje višine Sonca čez dan*. Dijaki so sami izdelali kamere, posneli vzhod in zahod Sonca ter posnetke obdeli. Narisali so graf $\alpha(t)$, podoben grafu 1.

Matematično modeliranje

Poskus je ponudil odlično iztočnico za modeliranje funkcije z uporabo IKT. Uporabili smo programa Excel in GeoGebra. Opisali bomo nekaj primerov modeliranja, pri čemer velja omeniti, da sta se dve ideji rodili v dijaških glavah. Cilji so bili:

- poiskati funkcijo, ki se najbolj prilega meritvam ali fotografiji
- ugotoviti čas sončnega vzhoda, ki ni bil izmerjen, tako da poiščemo ustrezno ničlo funkcije.

Neodvisno spremenljivka x predstavlja čas (t), odvisna spremenljivka $y = f(x)$ pa kot (α) Sonca nad obzorjem.

Primer 1: Modeliranje s trendno krivuljo (program GeoGebra)

Meritve (gl. tabelo 1) vnesemo v tabelo ter ustvarimo točke v koordinatnem sistemu.

Modeliranje s kvadratno funkcijo da enačbo:

$$f(x) = -1,28x^2 + 31,01x - 140,52 \text{ z ničlo } x_1 = 6,03 = 6^h2'$$

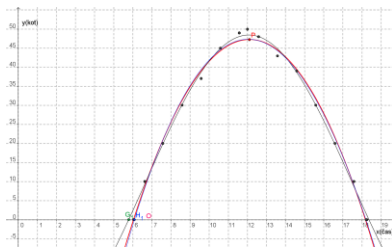
Ujemanje poskušamo izboljšati s polinomom 3.stopnje:

$g(x) = 0,01x^3 - 1,55x^2 + 34,25x - 152,48$, pri čemer je ničla $x_1 = 6,08 = 6^h5'$.

Ker pa je pot Sonca ciklični pojav, poskusimo še s sinusoido, kjer opazimo najboljše ujemanje s točkami. Rezultat je

$h(x) = 38,47 \cdot \sin(0,29x - 1,95) + 9,98$ z ustrežno ničlo $x = 6,08 = 6^h5'$.

Najboljši približek za čas sončnega vzhoda po Efemeridah [7] (ob $5^h51'$) dobimo torej s funkcijo f .



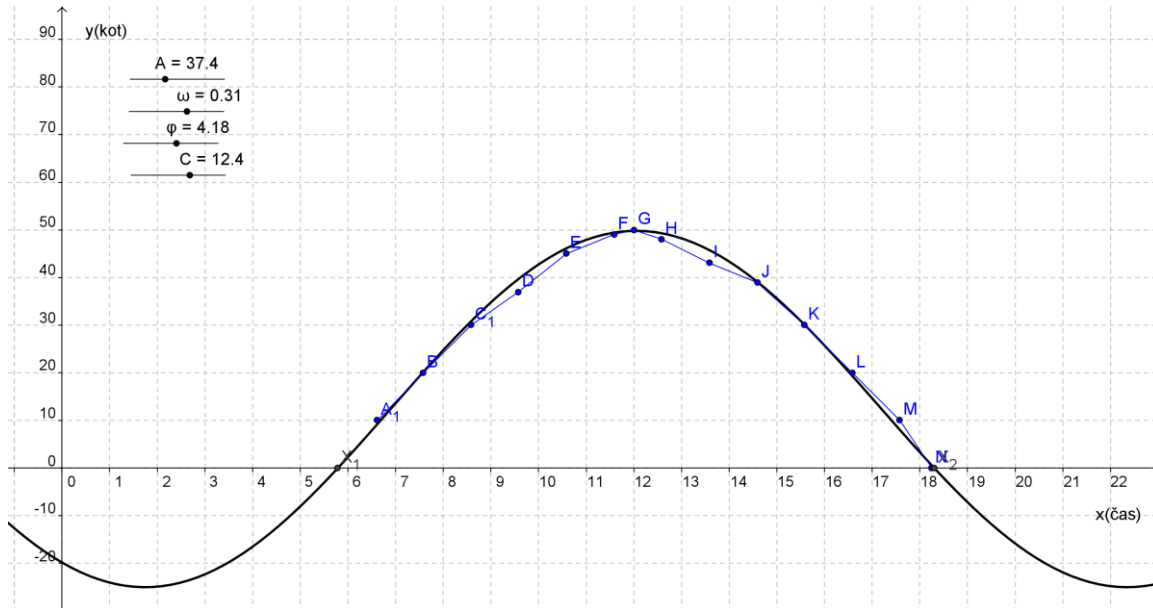
Graf 2. Modeliranje s trendnimi krivuljami.

Primer 2. Modeliranje s pomočjo drsnikov (program GeoGebra)

Dijak je iskal funkcijo v obliki $f(x) = A \sin(\omega x - \varphi) + C$, zato je ustvaril štiri drsnike za štiri parametre. Drsniki morajo biti v primernih mejah. S spreminjanjem drsnikov je premaknil krivuljo tako, da se je čim bolj prilegala točkam in dobil enačbo

$$f(x) = 37,4 \sin(0,31x - 4,18) - 12,4.$$

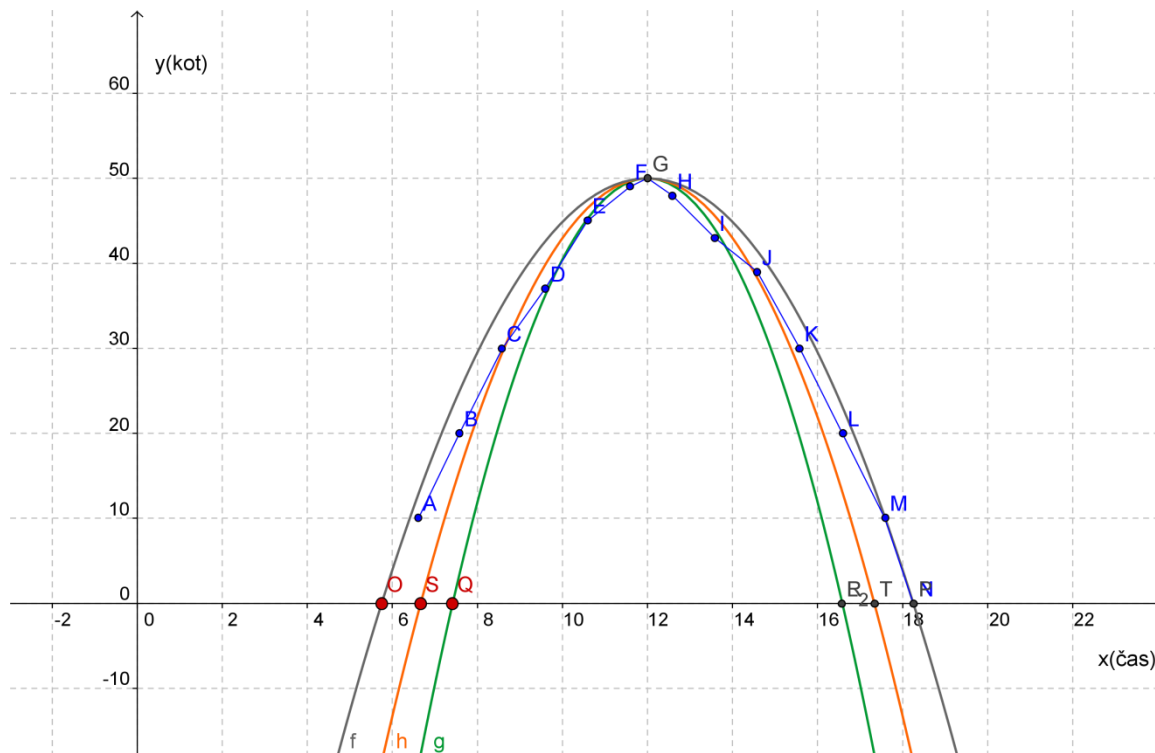
Ničla, ki označuje čas sončnega vzhoda je pri $x = 5,79 = 5^h48'$, kar je zelo dober približek.



Graf 3: Modeliranje z drsniki

Primer 3: Izračun vodilnega koeficienta kvadratne funkcije (programa Excel in Geogebra)

Dijak je uporabil temensko obliko kvadratne funkcije $f(x) = a(x - p)^2 + q$, pri čemer je za teme $T(p,q)$ uporabil izmerjeni vrednosti $p = 12$ in $q = 50$, za x_0 in $f(x_0)$ pa prvo meritev (6,6167, 10) in izračunal vrednost $a = \frac{f(x_0) - 50}{(x_0 - 12)^2}$. Dobil je funkcijo $f(x) = -1,28x^2 + 30,72x - 134$. Nato je iz vsake izmerjene vrednosti $(x_i, f(x_i))$ izračunal a in njegovo povprečno vrednost $a = -2,38$. Dobil je funkcijo $g(x) = -2,38x^2 + 57,19x - 293,11$. Postopek je ponovil, vendar je izločil dve vrednosti a z največjim odklikom in dobil enačbo $h(x) = -1,76x^2 + 42,19x - 203,15$. S programom GeoGebra je narisal vse tri funkcije in izračunal ničle, ki predstavljajo čas sončnega vzhoda. Najboljši približek za čas sončnega vzhoda je dobil s funkcijo f in sicer $5^h45'$, kar pomeni, da je bila prva meritev zelo natančna.



Graf 4: Izračun vodilnega koeficienta kvadratne funkcije .

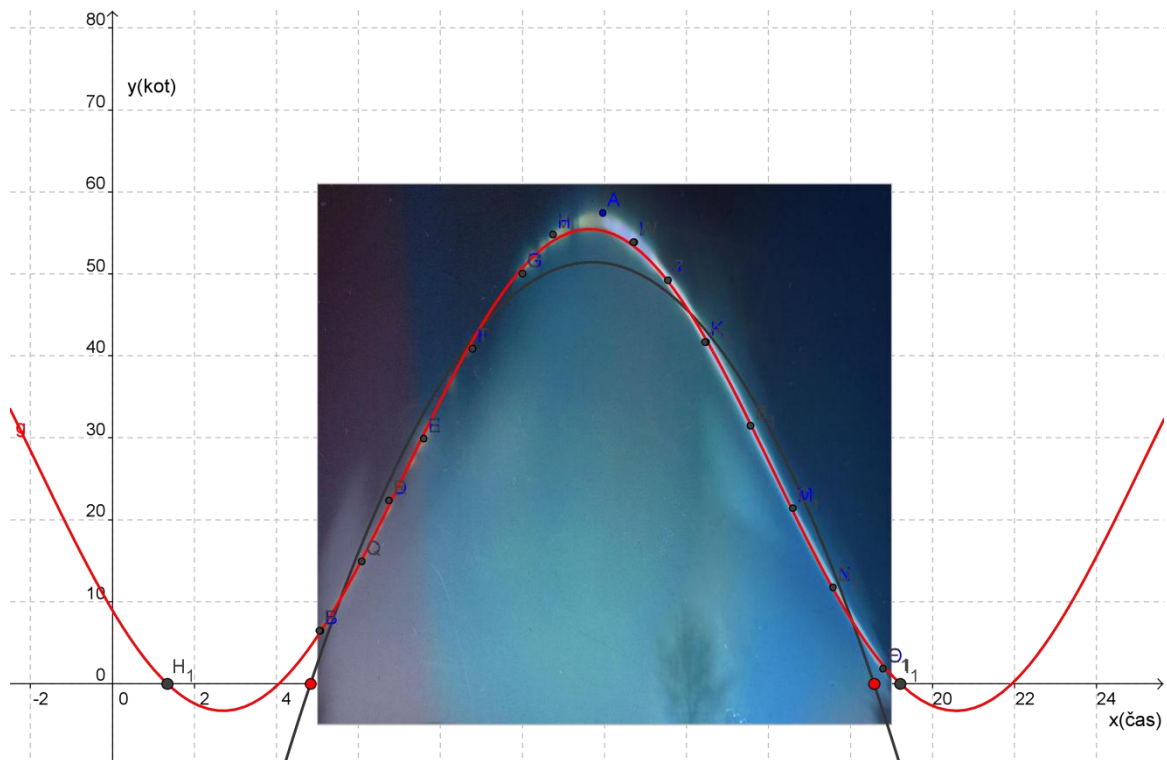
Primer 4. Modeliranje iz posnetka (program Geogebra)

Fotografijo sončne krivulje smo prenesli v koordinatni sistem. Umestili smo jo tako, da se ekstremna točka čimbolj ujema s kulminacijo sonca na ta dan ($11^h59'$, $\alpha = 58^\circ$), presečišče z osjo x pa s časom sončnega zahoda ($18^h24'$). Na krivulji izberemo nekaj točk in, kot v prvem primeru, poiščemo enačbo parabole oziroma sinusoide. Enačba parabole je

$$f(x) = -1,09x^2 + 25,2x - 97,73 \text{ z ničloma } x_1=4,83 \text{ in } x_2 = 18,57. \text{ Enačba sinusoide je}$$

$$g(x) = 29,39 \sin(0,35x - 2,52) + 26,08 \text{ z relevantnima ničloma } x_1 = 4,06 \text{ in } x_2 = 19,21.$$

Dobljeni rezultati so precej slabši kot pri prejšnjih poskusih modeliranja.



Graf 5: Modeliranje iz posnetka

Do rezultatov pridemo tudi brez uporabe programskih orodij. Če domnevamo, da potuje Sonce po paraboli, izberemo tri rezultate meritev (gl. tabelo 1) in poiščemo enačbo krivulje kot rešitev sistema treh linearnih enačb s tremi neznankami. Tri izbrane točke, npr. $T_1(7,58; 20)$, $T_2(11,58; 49)$ in $T_3(15,58; 30)$ vstavimo v enačbo $y = ax^2 + bx + c$ in rešimo sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami. Dobljena parabola $y = -1,5x^2 + 35,99x - 166,62$ ima ničli $x_1 = 6,27$ in $x_2 = 17,73$, kar pomeni sončni vzhod ob $6^h16'$ in sončni zahod ob $17^h44'$. Rezultati seveda variirajo glede na izbor točk. Poleg tega nam dijaki zaradi »grdih« števil ne bodo prav nič hvaležni, če jim bomo predlagali tak način modeliranja. Da ne omenjamo modeliranja s polinomi višjih stopenj ali sinusno funkcijo. Očitno je IKT pri problemih iz realnega življenja koristen pripomoček, tako glede prihranka časa kot tudi kvalitete rezultatov.

Zaključki

Pri izpeljavi projekta smo si na gimnaziji zadali cilje:

- terensko delo dijakov;
- samostojno delo dijakov: izdelajo kamero, posnamejo, skenirajo in posnetke obdelajo, npr. v programu PhotoShop;
- dijaki spoznajo, kaj je kamera obskura in kako se Sonce preslika na foto papir;
- povezovanje fizike in matematike: iz rezultatov meritev ali iz posnetka poti Sonca določiti pripadajočo splošno obliko funkcije (zapis parabole ali premice);
- uporaba IKT pri modeliranju funkcije;
- fizikalna analiza dobljenih funkcijskih zapisov: ničel in ekstrema funkcije;
- pokazati dijaku, da narava piše svoje krivulje, ki jih lahko analiziramo in opišemo.

Ob zaključku projekta lahko rečemo, da smo dijaku pokazali povezavo dela na terenu z delom v razredu (posneto naravno dogajanje smo nadgradili z matematičnim orodjem; vzhod in zahod smo povezali z ničlo funkcije) in povezavo med matematiko in fiziko. Pri izdelavi kamere so dijaki opazili, da je posnetek Sonca na papirju tanka, jasna krivulja in da je odvisen od velikosti in obdelave luknjice pri kameri. Dijaki so spoznali, da morajo biti pri postavljanju kamer natančni (npr.: če je niso dovolj natančno usmerili proti vzhodu, potem ne niso posneli vzhoda). Pri merjenju kota (α) pa so spoznali, da ga ne smejo meriti kar tako, »na oko«. Dijaki so razumeli, da samo pogled na narisani graf $\alpha(t)$ (gl. graf 1) ni dovolj, da določimo kakšna funkcija mu pripada. To je lahko le prva ocena (približek), nato pa se moramo poglobiti in npr. modelirati z ustreznimi orodji. Dijaki so spoznali, da je IKT pri problemih iz realnega življenja koristen pripomoček, tako glede prihranka časa kot tudi glede kvalitete rezultatov.

Ob izpeljavi tega projekta se nam je utrnila misel, da bi lahko pripravili podobne laboratorijske vaje za maturante oziroma za dijake, ki jih zanima naravoslovje. Saj tako dijaku približamo matematiko skozi fiziko in obratno. Počasi dojamejo, da ima matematika orodja za reševanje in zapis fizikalnih zakonov.

Viri

[1] Strnad, Janez (2006). O poučevanju fizike. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.

[2] Avsec, F. in Prosén, M. (1989). Astronomija. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.

- [3] Pasachoff, J. M. in Percy, J. R. (ur.). (1992). The Teaching of Astronomy. Cambridge: University Press.
- [4] Seeds, M. A. in Backman, D. E. (2011). Foundations of Astronomy. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- [5] Young, H. D. in Freedman, R. A. (1996). University Physics. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [6] Legiša, Peter (1998). Matematika, drugi letnik, vektorji, potence in koreni, kvadratna funkcija, Ljubljana, DZS
- [7] Naše nebo 2012, (2012) Astronomske efemeride 2012, DMFA – založništvo, Ljubljana